OPTIMIZACIJA

osnovna razmatranja

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.1. Uvod

- Optimizacija je proces dobijanja najboljeg rezultata pod datim okolnostima.
- Kod projektovanja, izgradnje i održavanja bilo kog sistema, inženjeri moraju, u različitim fazama, da donesu mnoge tehničke i menadžerske odluke i rešenja.
- Krajnji cilj svih ovih odluka je ili da se minimizuje potrebno angažovanje ili da se maksimizuje željena dobit.
- U svim praktičnim situacijama potrebno angažovanje i željena dobit mogu se izraziti kao funkcija određenih upravljačkih promenljivih.
- Prema tome optimizacija se može definisati kao proces pronalaženja takvih uslova koji daju minimalnu ili maksimalnu vrednost funkcije.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.1. Uvod

- Ne postoji jedinstven optimizacioni metod za rešavanje svih optimizacionih problema.
- Samim tim, razvijen je veliki broj optimizacionih metoda za rešavanje različitih tipova optimizacionih problema.
- Postupak nalaženja optimuma naziva se i matematičko programiranje i ono se generalno izučava kao deo operacionih istraživanja.
- Operaciono istraživanje je grana matematike koja se bavi primenom naučnih metoda i tehnika u procesu donošenja odluka i pronalaženju optimalnog rešenja.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.1. Uvod

- U Tabeli je dat pregled nekih od optimizacionih tehnika koji se koriste za rešavanje različitih optimizacionih problema
- U tabeli su metode podeljene na klasične i moderne optimizacione metode. To je samo jedna od mogućih podela optimizacionih metoda.

Klasične metode	**Moderne metode**
Linearno programiranje	Genetički algoritmi
Nelinearno programiranje	Simulirano kaljenje
Geometrijsko programiranje	Kolonija mrava
Kvadratno programiranje	Roj čestica
Dinamičko programiranje	Diferencijalna evolucija
Celobrojno programiranje	Neuralne mreže
Ciljno programiranje	Fuzzy optimizacija
Multikriterijumsko programiranje	
Metoda unutrašnje tačke	
Teorija igre	

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.2. Modelovanje optimizacionog problema

- Optimizacioni problem modelovan jednom kriterijumskom funkcijom može se u opštem slučaju opisati sledećom matematičkom formulacijom:

$$
\begin{aligned}
&\min/\max f(\mathbf{x}), \\
&\text{p.o.:} \quad g_j(\mathbf{x}) \le 0, \qquad j = 1,2,\ldots,J; \\
&\qquad\quad\; h_k(\mathbf{x}) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,K; \\
&\qquad\quad\; x_i^G \ge x_i \ge x_i^D, \quad i = 1,2,\ldots,N.
\end{aligned}
$$

gde je:

$f(\mathbf{x})$ – kriterijumska funkcija,

$\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \cdots x_N]^T$ – vektor upravljačkih promenljivih

$g_j(\mathbf{x})$ – ograničenja tipa nejednakosti,

$h_k(\mathbf{x})$ – ograničenja tipa jednakosti,

x_i^D – donja granica za promenljivu x_i

x_i^G – gornja granica za promenljivu x_i

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.3. Vektor upravljačkih promenljivih

- Svaki inženjerski sistem ili komponenta definisana je skupom određenih veličina.
- Generalno gledano određeni broj tih veličina ima konstatne vrednosti pa se ove veličine mogu nazvati parametri.
- Sve ostale veličine u procesu dizajniranja mogu se tretirati kao promenljive.
- Ove promenljive se nazivaju *upravljačke ili kontrolne promenljive* x_i, $i = 1, 2, ..., N$.
- Skup upravljačkih promenljivih čini vektor upravljačkih promenljivih:

$$\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \cdots x_N]^T$$

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.3. Vektor upravljačkih promenljivih

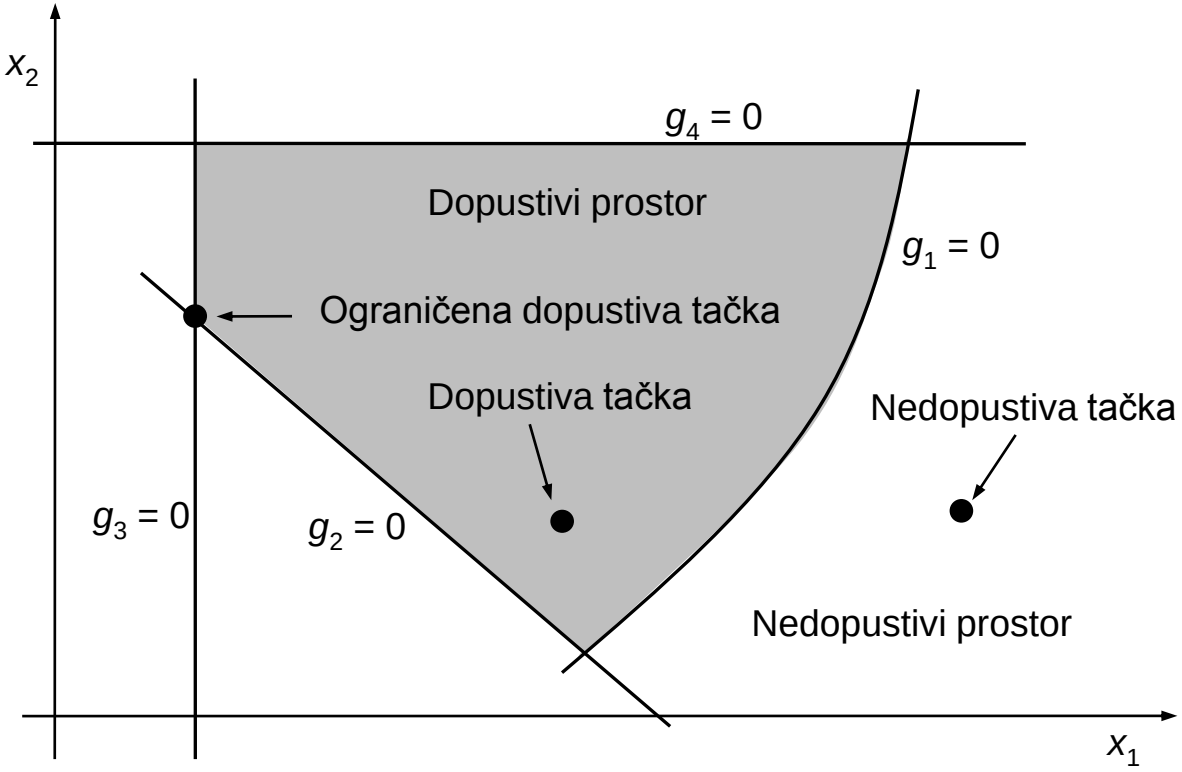
- Vektor upravljačkih promenljivih **x** formira N–dimenzionalni prostor koji je podskup Euklidovog (*Euclid*) prostora R^N.
- Ovaj prostor se naziva *prostor upravljačkih promenljivih* ili samo *upravljački prostor*.
- Vektor upravljačkih promenljivih **x** može biti vektor kontinualnih ili diskretnih promenljivih kao što i kriterijumska funkcija može biti kontinualna ili diskretna.
- Svaka tačka u upravljačkom prostoru može da bude dopustivo ili nedopustivo rešenje optimizacionog problema.
- Da li je neka tačka dopustiva ili ne zavisi od toga da li ta tačka zadovoljava postavljena ograničenja.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.4. Ograničenja

- Kod modelovanja jednog optimizacionog problema od presudne važnosti je modelovanje ograničenja.
- Kod konkretnih inženjerskih problema postavljena ograničenja omogućavaju da dobijena rešenja u procesu optimizacije imaju fizički smisao.
- Neadekvatno modelovanje ograničenja može dovesti do toga da dobijeni rezultat nema fizički smisao pa je samim tim neupotrebljiv.
- Radi ilustracije može se posmatrati optimizacioni problem koji ima samo ograničenja tipa nejednakosti $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$, $j = 1, ..., J$.
- Skup vrednosti upravljačkog vektora $\mathbf{x}$ koji zadovoljava jednačinu $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, ..., J$ formira hiper površ u prostoru upravljačkih promenljivih koja se naziva *površ ograničenja*.
- Površ ograničenja deli prostor upravljačkih promenljivih na dva dela: prvi u kome je $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$, $j = 1, ..., J$ i drugi u kome je $g_j(\mathbf{x}) > 0$, $j = 1, ..., J$.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.4. Ograničenja

- Na Slici je prikazan hipotetički dvodimenzionalni upravljački prostor sa krivama ograničenja.



1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.5. Kriterijumska funkcija

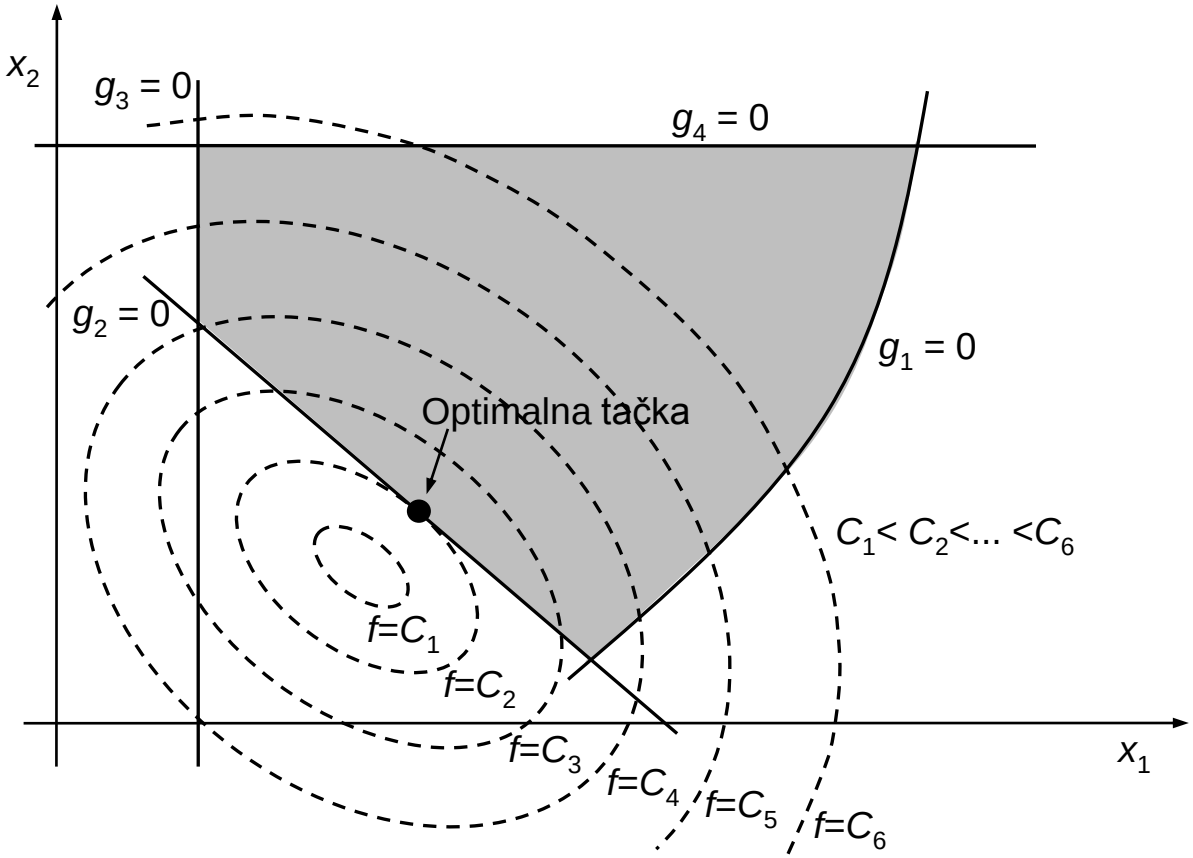
- Kod projektovanja nekog sistema glavni cilj je nalaženje prihvatljivog ili adekvatnog rešenja koje zadovoljava postavljene zahteve.
- Generalno gledano, može da postoji više prihvatljivih rešenja pa je svrha optimizacije izbor najboljeg od njih.
- Prema tome potrebno je izabrati kriterijum prema kome će se porediti različita prihvatljiva rešenja i izabrati najbolje.
- Kriterijum prema kome se vrši optimizacija, a koji je izražen u funkciji upravljačkih promenljivih naziva se *kriterijumska ili objektivna funkcija*.
- Izbor kriterijumske funkcije zasvisi od prirode problema i oblasti u kojoj se primenjuje.
- Na primer u energetskim sistemima to može da bude minimizacija različitih troškova, maksimizacija profita, mimimizacija gubitaka aktivne snage, minimizacije utrošenog vremena za neku aktivnost itd.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.5. Kriterijumska funkcija

- Izbor kriterijumske funkcije svakako predstavlja najvažniju odluku u procesu rešavanja nekog optimizacionog problema.
- Potrebno je reći da je kod nekih optimizacionih problema potrebno simultano zadovoljiti više kriterijumskih funkcija pa se takva optimizacija naziva *višekriterijumska optimizacija*.
- Sve tačke koje zadovoljavaju jednačinu $f(\mathbf{x}) = C$, pri čemu je C kontanta, formiraju hiperpovršinu u upravljačkom prostoru.
- Različitim vrednostima konstante C odgovaraju različite hiperpovrši.
- Prema tome, variranjem vrednosti konstante C dobija se familija površi u upravljačkom prostoru.
- Ove površi se nazivaju *površi kriterijumske funkcije* i prikazane su u hipotetičkom dvodimenzionalnom upravljačkom prostoru na narednoj slici.

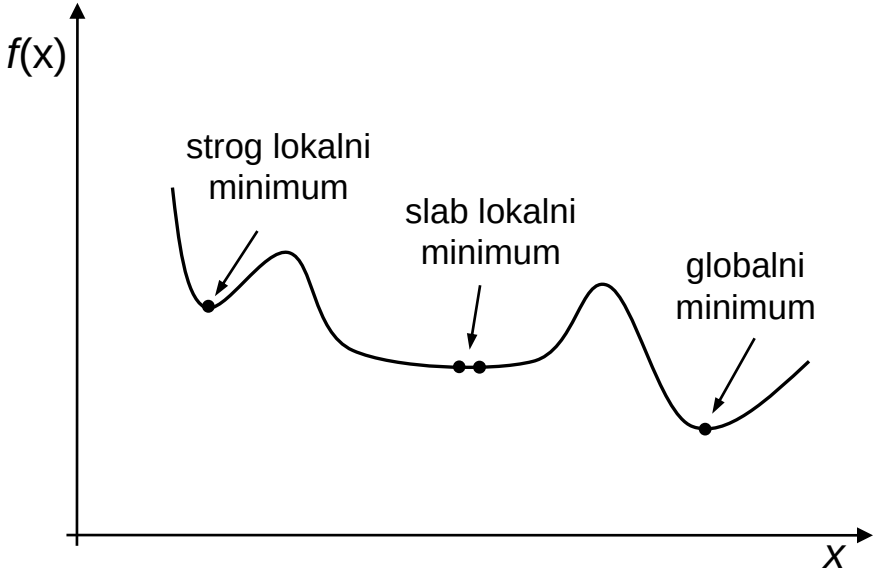
1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.5. Kriterijumska funkcija

- Kada su površi kriterijumske funkcije nacrtane zajedno sa površima ograničenja, optimalna tačka može se odrediti na jednostavan način, kao što je prikazano je na slici.



1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.5. Kriterijumska funkcija

- Generalno gledano, proces optimizacije podrazumeva nalaženje minimalne ili maksimalne vrednosti zadate kriterijumske funkcije.
- Cilj minimizacije je nalaženje globalnog minimuma kriterijumske funkcije. Pored globalnog minimuma može da postoji i lokalni minimum. Lokalni minimum može biti strog ili slab.
- Na slici je data ilustracija lokalnog i globalnog minimuma.



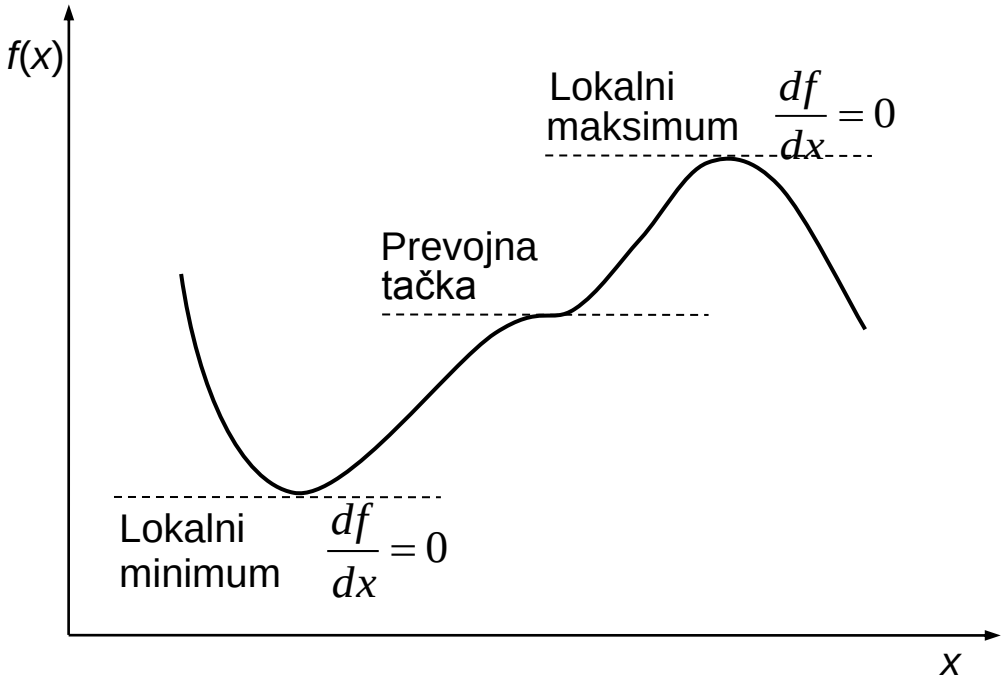
1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.6. Uslovi optimalnosti bez prisustva ograničenja

- Za razumevanje procesa optimizacije veoma je važno analizirati uslove optimalnosti.
- Uslovi optimalnosti u suštini su važni iz dva razloga.
- Prvo, oni su neophodni da se prepozna rešenje optimizacionog problema.
- Pored toga oni mogu da daju ideje i smernice za razvoj optimizacionih metoda.
- Za početak se može analizirati kriterijumska funkcija od jedne promenljive, $f(x)$.
- Neka je data funkcija neprekidna i neka je njen prvi izvod takođe neprekidna funkcija na celom razmatranom intervalu.
- *Potreban uslov* za egzistenciju minimuma ili maksimuma kriterijumske funkcije je da nagib funkcije, odnosno prvi izvod kriterijumske funkcije f po promenljivoj x bude jednak 0:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.6. Uslovi optimalnosti bez prisustva ograničenja

- Potreban uslov egzistencije ekstremne vrednosti diferencijabilne funkcije $f(x)$ ilustrovan je na slici.



1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.6. Uslovi optimalnosti bez prisustva ograničenja

- Tačka u kojoj je zadovoljen potreban uslov naziva se stacionarna tačka.
- *Dovoljan uslov* se dobija na osnovu vrednosti drugog izvoda u okolini te tačke.
- Na primer, dovoljan uslov za maksimum je da drugi izvod u toj tački bude negativan.
- To praktično znači da svaka promena promenljive x u okolini te tačke dovodi do smanjenja vrednosti funkcije f.
- Slično, dovoljan uslov za egzisteniciju minimuma je da drugi izvod funkcije bude pozitivan.
- Na sličan način mogu se analizirati uslovi optimalnosti za slučaj kriterijumske funkcije f sa vektorskom promenljivom $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}=[x_1, x_2, ..., x_N]$.

1. UVOD U OPTIMIZACIJU
1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja

- Analiza će se započeti sa optimizacionim problemom koji uključuje ograničenja tipa jednakosti:

$$\min f(x_1, x_2, ..., x_N)$$
$$\text{p.o.} h_k(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \; k = 1, ..., K$$

- U principu, ovakav problem može da se reši kao optimizacioni problem bez ograničenja eliminacijom K nezavisnih promenljivih korišćenjem ograničenja tipa jednakosti.
- Prisustvo ograničenja jednakosti redukuje dimenzionalnost orginalnog problema sa N na $N - K$.
- Kada je optimizacioni problem redukovan na problem bez ograničenja on se može rešiti nekom adekvatnom optimizacionom metodom.

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.1. Lagranžovi multiplikatori

- Metoda Lagranžovih multiplikatora u osnovi daje skup potrebnih uslova za identifikaciju kandidata za optimalne tačke optimizacionog problema sa ograničenjima.
- Ovo se vrši konvertovanjem problema sa ograničenjima u ekvivalentan problem bez ograničenja uvođenjem odgovarajućih parametara koji se zovu Lagranžovi multiplikatori.
- Može se najpre analizirati minimizacija funkcije sa N promenljivih uz jedno ograničenje tipa jednakosti:

$$\min \; f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

$$\text{p.o. } h_1(x_1, x_2, ..., x_N) = 0$$

- Metoda Lagranžovih multiplikatora konvertuje dati optimizacioni problem u sledeći optimizacioni problem bez ograničenja:

$$\min \; L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda h_1(\mathbf{x})$$

- Izjednačavanjem parcijalnih izvoda Lagranžove funkcije po promenljivim $\mathbf{x}$ i λ dobijaju se potrebni uslovi egzistencije minimuma:

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.1. Lagranžovi multiplikatori

- **Primer (ekonomski dispečing)**. Data su dva termoagregata. Krive troškova kao i mogući radni opsezi pojedinih agregata dati su sledećim izrazima:

$$F_1[\text{NJ/h}] = 30 + 9P_1 + 0.1P_1^2 \qquad 40\ \text{MW} \le P_1 \le 120\ \text{MW}$$

$$F_2[\text{NJ/h}] = 40 + 7P_2 + 0.15P_2^2 \qquad 40\ \text{MW} \le P_2 \le 120\ \text{MW}$$

- Ova dva agregata napajaju zajedničku potrošnju čija je snaga P_p = 150 MW. Potrebno je odrediti snage pojedinih agregata tako da ukupni troškovi proizvodnje budu minimalni.
- Na osnovu datih podataka može se definisati sledeći optimizacioni problem:

$$\min F = 30 + 9P_1 + 0.1P_1^2 + 40 + 7P_2 + 0.15P_2^2$$

$$\text{p.o.:}\ P_1 + P_2 = P_p = 150\ \text{MW}$$

pri čemu treba uvažiti i moguće radne opsege termoagregata.

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.1. Lagranžovi multiplikatori

- Može se formirati proširena Lagranžova funkcija:

$$L = F - \lambda(P_1 + P_2 - P_p)$$

- Parcijalni izvodi Lagranžove funkcije po nepoznatim promenljivim su:

$$\frac{\partial L}{\partial P_1} = 9 + 0.2P_1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_2} = 7 + 0.3P_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_1 + P_2 - P_p = 0$$

- Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se rešenje:

$$P_1 = 100.4\ \mathrm{MW} \quad P_2 = 49.6\ \mathrm{MW} \quad \lambda = 21.88\ \mathrm{NJ/MWh}$$

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.1. Lagranžovi multiplikatori

- Lagranžov metod se može generalizovati na slučaj optimizacije sa više ograničenja tipa jednakosti. Neka je dat optimizacioni problem:

$$\min \quad f(\mathbf{x}) = 0$$
$$\text{p.o.} \quad h_k(\mathbf{x}) = 0, \;\; k = 1, \ldots, K$$

- Proširena Langranžova funkcija u ovom slučaju je:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(\mathbf{x})$$

- Veličine $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$ predstavljaju Lagranžove multiplikatore koje je potrebno odrediti zajedno sa promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_N$.
- Izjednačavanjem parcijalnih izvoda funkcije L po $\mathbf{x}$ dobija se sistem od N jednačina sa N nepoznatih:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n} = 0, \;\; n = 1, \ldots, N$$

- Ovom sistemu jednačina dodaje se K jednačina ograničenja tipa jednakosti:

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \;\; k = 1, \ldots, K$$

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.2. Kun–Takerovi uslovi

- Kun i Taker su proširili prethodnu teoriju na opšti nelinearni optimizacioni problem sa ograničenjima tipa jednakosti i nejednakosti.
- Može se posmatrati sledeći optimizacioni problem:

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o.}\, g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J \\ &\qquad h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, K \\ &\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_N]^T \end{aligned}$$

- Za ograničenje tipa nejednakosti $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ se kaže da je aktivno u tački $\mathbf{x}_0$ ako je $g_j(\mathbf{x}_0) = 0$. U suprotnom, za ograničenje se kaže da je neaktivno ako je $g_j(\mathbf{x}_0) > 0$.
- Ako je moguće identifikovati neaktivna ograničenja u optimumu pre rešavanja optimizacionog problema onda se ta ograničenja mogu isključiti iz razmatranja i time redukovati dimenziju problema.
- Međutim, kod većine realnih problema to je uglavnom nemoguće uraditi.

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.2. Kun–Takerovi uslovi

- I u ovom slučaju može se formirati proširena Lagranžova funkcija:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{J} \mu_j g_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_k h_k(\mathbf{x})$$

- U ovoj jednačini, Lagranžovi multiplikatori λ_k odgovaraju ograničenjima tipa jednakosti, a Lagranžovi multiplikatori μ_j odgovaraju ograničenjima tipa nejednakosti.
- Multiplikatori μ_j se zovu još i Kun–Takerovi multiplikatori.
- Kun i Taker su razvili potrebne i dovoljne uslove za opšti nelinearni optimizacioni problem uz pretpostavku da su funkcije f, g_j i h_k diferencijabilne.
- Ovi uslovi optimalnosti su poznati kao Kun–Takerovi uslovi ili Kun–Takerov problem. Ovi uslovi se uglavnom daju u formi sistema nelinearnih jednačina koje je potrebno rešiti.

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.2. Kun–Takerovi uslovi

- Drugim rečima Kun–Takerovi uslovi se svode na određivanje vektora **x**, **μ**, **λ** koji zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^{J} \mu_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^{K} \lambda_j \nabla h_k(x) = 0 \qquad (1)$$

$$g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J \qquad (2)$$

$$h_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, K \qquad (3)$$

$$\mu_j g_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J \qquad (4)$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J \qquad (5)$$

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.2. Kun–Takerovi uslovi

- Uslovi (1) – (3) su jasni na osnovu prethodnih izlaganja.
- Uslov dat jednačinom (4) naziva se uslov komplementarnosti. Ovaj uslov se odnosi na stanje ograničenja.
- Ako je j–to ograničenje neaktivno odnosno $g_j(\mathbf{x}_0) > 0$, onda je $\mu_j = 0$ i važi da je $\mu_j g_j(\mathbf{x}_0) = 0$.
- U suprotnom, ako je j–to ograničenje aktivno odnosno $g_j(\mathbf{x}_0) = 0$, onda nije neophodno da multiplikator μ_j bude jednak 0, pošto je već ispunjeno da je $\mu_j g_j(\mathbf{x}_0) = 0$.
- Dodatni uslov je da multiplikator μ_j bude nenegativan, kao što je dato jednačinom (5).

1.7. Uslovi optimalnosti u prisustvu ograničenja
1.7.2. Kun–Takerovi uslovi

- Uvođenjem dodatnih promenljivih, ograničenja tipa nejednakosti mogu se prevesti u ograničenja tipa jednakosti.
- Prethodni optimizacioni problem postaje:

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$\text{p.o.}\, g_j(\mathbf{x}) - y_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, K$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_N]^T$$

- Ovako postavljeni problem bez ograničenja tipa nejednakosti može da se reši primenom metode Lagranžovih multiplikatora pri čemu promenljive y_j, $j = 1, \ldots, J$, imaju isti tretman kao i promenljive $\mathbf{x}$.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- LP je optimizacioni metod koji se može primeniti za rešavanje problema kod kojih su kriterijumska funkcija i ograničenja linearne funkcije upravljačih promenljivih.
- Funkcije ograničenja kod LP mogu biti u formi jednakosti ili nejednakosti.
- Problem LP sa *m* ograničenja i *n* promenljivih, u opštem slučaju, može se predstaviti sledećim jednačinama:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{p.o. } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{3}$$

- Jednačina (1) predstavlja kriterijumsku funkciju.
- Jednačinama (2) predstavljena su ograničenja.
- Uslovi nenegativnosti promenljivih dati su jednačinom (3).

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- U matričnoj formulaciji problem linearnog programiranja može se napisati u kompaktnijoj formi.

$$\begin{aligned} &\min Z = \mathbf{cx} \\ &\text{p.o. } \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

  gde je Z kriterijumska funkcija, **A** je matrica dimenzije $m \times n$, **x** je vektor kolona dimenzije n , **b** je vektor kolona dimenzije m i **c** je vektor vrsta dimenzije n.
- U praksi matrica **A** se naziva *matrica ograničenja*, **x** je *vektor kontrolnih promenljivih*, **b** je *vektor konstanti*, a **c** je *vektor koeficijenata troškova*.
- Cilj ovako postavljenog optimizacionog zadatka je minimizacija zadate kriterijumske funkcije Z uz uvažavanje svih postavljenih ograničenja.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- Radi ilustracije biće prikazan grafički postupak za rešavanje problema LP sa dve upravljačke promenljive.
- Primer:

$$\min Z = x_1 + 4x_2$$

$$\text{p.o. } 5x_1 + 6x_2 \geq 46$$

$$x_1 \leq 8$$

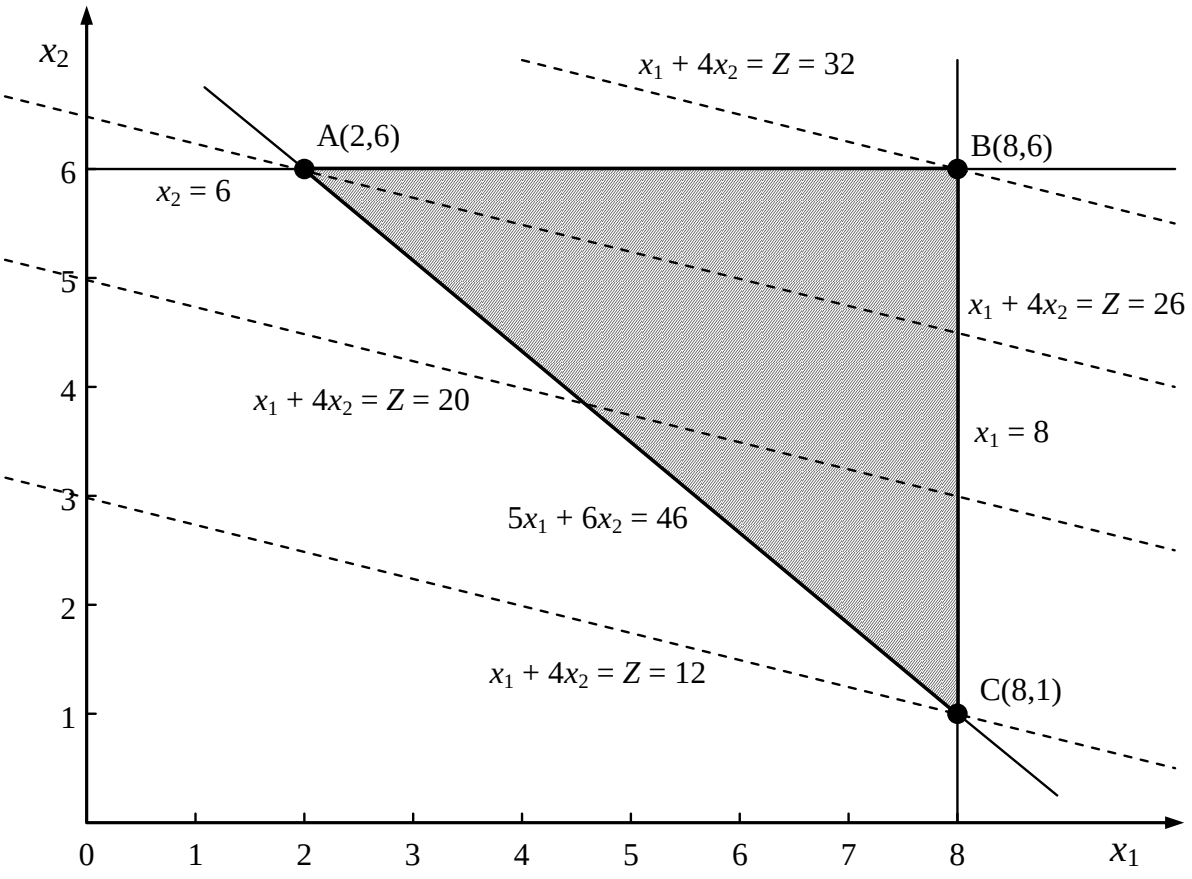
$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

- Cilj postavljenog problema je određivanje vrednosti promenljivih x_1 i x_2 koje daju minimalnu vrednost zadate kriterijumske funkcije.
- Pre svega potrebno je odrediti moguće vrednosti za promenljive x_1 i x_2 imajući u vidu data ograničenja. To se postiže crtanjem datih ograničenja u koordinatnom sistemu promenljivih x_1 i x_2.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- Prikaz je dat na slici:



2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- Sve tačke koje pripadaju osenčenoj oblasti na slici zadovoljavaju zadata ograničenja.
- Ove tačke su *dopustive tačke* odnosno dopustiva rešenja zadatog problema.
- Skup svih dopustivih rešenja čini *dopustivu oblast* koja je u ovom slučaju predstavljena osenčenim trouglom ABC na slici.
- Ugaone tačke dopustive oblast (tačke A, B i C) nazivaju se i *ekstremne tačke*.
- Kao što se može sa slike videti broj dopustivih rešenja je beskonačno veliki.
- Cilj optimizacije je nalaženje najboljeg dopustivog rešenja u dopustivoj oblasti.
- Najbolje dopustivo rešenje naziva se optimalno rešenje optimizacionog problema.
- Vrednost kriterijumske funkcije koja odgovara optimalnom rešenju predstavlja optimalnu vrednost kriterijumske funkcije.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- Nalaženje optimalnog rešenja za analizirani primer grafičkim putem je veoma jednostavno.
- Potrebno je uočiti da kriterijumska funkcija $Z = x_1 + 4x_2$, za unapred zadatu vrednost Z, predstavlja pravu u koordinatnom sistemu.
- Variranjem vrednosti za Z dobijaju se nove prave koje su paralelne početnoj pravoj.
- Proces može da počne na primer iz tačke B kojoj odgovara vrednost kiterijumske funkcije $Z = 32$. Transliranjem prave prema koordinatnom početku vrednost kriterijumske funkcije opada.
- Konačno najmanja vrednost kriterijumske funkcije dobija se kada prava prolazi kroz tačku C.
- Upravo tačka C predstavlja najbolju dopustivu tačku za koju imamo najmanju vrednost kriterijumske funkcije.
- Prema tome $x_1 = 8$ i $x_2 = 1$ predstavljaju optimalno rešenje, a $Z = 12$ predstavlja optimalnu vrednost kriterijumske funkcije.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.1. Linearno programiranje (LP)

- Grafičko rešavanje problema LP je jednostavno ali može da se primeni za probleme veoma male dimenzionalnosti.
- Standardan metod za rešavanje problema LP je *Simplex* metod.
- Pored njega koristi se i metod unutrašnje tačke ("*Interior point method*")
- U Matlabu postoje gotovi programski paketi koji koriste ove dve metode za rešavanje LP problema.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Njutnov algoritam predstavlja jedan od osnovnih alata u numeričkoj analizi i optimizaciji, uključujući kako linearne tako i nelinearne probleme optimizacije.
- Njutnov algoritam predstavlja iterativnu proceduru koja je svoju primenu našla u najrazličitijim oblastima nauke i tehnike.
- Osnovna primena Njutnovog algoritma jeste u pronalaženju korena nelinearnih kontinualnih diferencijabilnih funkcija.
- U problemima optimizacije zadatak određivanja korena funkcija svodi se na zadatak određivanja korena izvoda funkcija koje su dva puta diferencijabilne na posmatranom opsegu.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Može da se pođe od jednodimenzionalnog problema koji se rešava Njutnovim algoritmom.
- Neka je data funkcija $f(x)$ čiji je koren potrebno odrediti, tj. potrebno je rešiti jednačinu:

$$f(x) = 0$$

- Razvojem funkcije $f(x)$ u Tejlorov red u okolini neke proizvoljno izabrane tačke $x = x_0$ dobija se aproksimacija funkcije $f(x)$ u okolini tačke x_0.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + g_{n+1}(x_0 + h)$$

- U ovoj jednačini funkcija $f(x)$ je razvijena do n–tog reda.
- Funkcijom $g_{n+1}(x)$ su predstavljeni članovi višeg reda od n koji definišu grešku aproksimacije funkcije $f(x)$ u ovom slučaju.
- *Veličina* h predstavlja mali pomeraj promenljive x oko tačke x_0, tj. $h = x - x_0$.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Ako se dalje pretpostavi da se funkcija $f(x)$ može aproksimirati Tejlorovim redom zaključno sa članom prvog reda, pri čemu je greška aproksimacije zanemarljivo mala i jednaka $\pm\varepsilon$, a da se izabrana tačka x_0 nalazi u okolini tačke x^* koja predstavlja rešenje jednačine, tj. $f(x^*) = 0$, dobija se jednačina:

$$0 \pm \varepsilon = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \left(x^* - x_0\right)$$

- Korišćenjem poslednje jednačine uz zanemarenje greške ε lako se dolazi do rešenja jednačine $f(x) = 0$.

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- U slučaju da izabrana tačka x_0 nije bila dovoljno blizu rešenja jednačine $f(x) = 0$, tj. dovoljno blizu tačke x^*, potrebno je ponovo izabrati tačku i ponoviti proračun definisan poslednjom jednačinom.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Iterativni postupak izbora tačaka i proračuna rešenja jednačine $f(x) = 0$ se naziva Njutnov algoritam i definisan je sledećim koracima:

  Korak 1. U ovom koraku se vrši početno pogađanje rešenja, tj. pretpostavka rešenja jednačine. Ovo rešenje se naziva inicijalno rešenje i označava se indeksom „0“.

$$x = x_0$$

- **Korak 2**. U ovom koraku se proverava tačnost pretpostavljenog rešenja, tj. proračunava se vrednost funkcije $f(x)$ za pretpostavljeno rešenje. Uvažavajući zadovoljavajuću tačnost ε proverava se da li je vrednost funkcije manja od ε.

$$\left| f\left(x_i\right) \right| \leq \varepsilon$$

  U poslednjoj jednačini je $i = 0$ za inicijalno rešenje, odnosno $i \geq 1$ za rešenja iz ostalih iteracija. Ukoliko je ovaj uslov ispunjen tada x_i predstavlja konačno rešenje, u suprotnom se prelazi na korak 3.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

Korak 3. U ovom koraku se vrši korekcija rešenja iz prethodne iteracije:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Nakon korekcije rešenja vraća se na korak 2.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

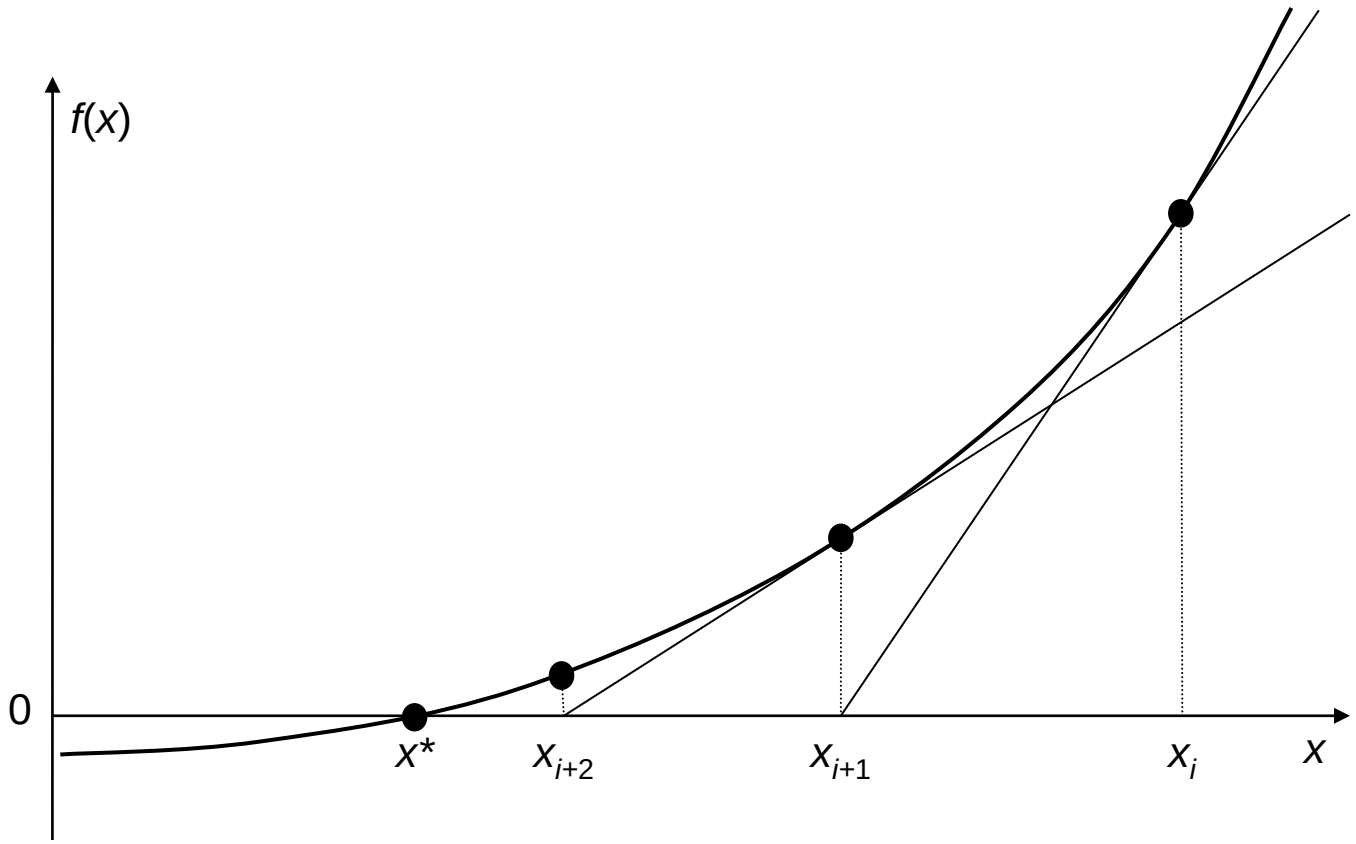
- Količnik kojim se definiše inkrement, tj. korekcija rešenja se naziva Njutnov pravac.

$$d = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Za bolje razumevanje Njutnove metode, veoma je korisno grafički opisati iterativni postupak.
- Treba imati u vidu da se u cilju primene Njutnove metode funkcija $f(x)$ aproksimira linearnom funkcijom (Tejlorovim redom zaključno sa članom prvog reda) u okolini izabrane tačke x_i.
- Ova aproksimacija linearnom funkcijom u suštini predstavlja tangentu funkcije $f(x)$ u izabranoj tački x_i.
- Rešenje jednačine $f(x) = 0$ u tom slučaju predstavlja presek ove tangente sa x osom, tj. tačka preseka tangente sa x osom definiše novu tačku x_{i+1} u iterativnoj proceduri.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Grafički prikaz iterativne procedure je prikazan na slici.



2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Veliki broj problema koji se susreće u praksi jesu višedimenzionalni problemi, tj. problemi više funkcija više promenljivih veličina. Polazeći od postavke jednačine $f(x) = 0$, vrlo se jednostavno može preći na višedimenzionalni problem.

$$\begin{gathered} f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \\ \vdots \\ f_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \end{gathered}$$

- Ovaj sistem može se zapisati i u vektorskoj formi.

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}$$

gde **f** predstavlja vektor *n* funkcija, dok **x** predstavlja vektor *n* promenljivih veličina.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Ako se definiše matrica parcijalnih izvoda vektorske funkcije **f** po vektorskoj promenljivoj **x**, dobija se Jakobijeva (*Jacobi*) matrica definisana jednačinom

$$\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Primenom analogije sa jednodimenzionalnim problemom, dobija se jednačina

$$\mathbf{0}\pm\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x_0}\right)+\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{x_0}\right)\cdot\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x_0}\right)$$

- Na osnovu ove jednačine jednostavno se dolazi do rešenja sistema jednačina:

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{x_0}-\left(\nabla\mathbf{f}\left(\mathbf{x_0}\right)\right)^{-1}\cdot\mathbf{f}\left(\mathbf{x_0}\right)$$

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Iterativni postupak u slučaju vektorske funkcije vektorske promenljive, tj. u slučaju višedimenzionalnih problema je analogan postupku u slučaju jednodimenzionalnog problema.

  Korak 1. Inicijalno rešenje.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$$

- **Korak 2**. Provera tačnosti pretpostavljenog rešenja.

$$\left|\mathbf{f}\left(\mathbf{x_i}\right)\right| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$$

  Ukoliko je uslov ispunjen tada $\mathbf{x_i}$ predstavlja konačno rešenje, u suprotnom se prelazi na korak 3.

- **Korak 3.** Korekcija rešenja iz prethodne iteracije.

$$\mathbf{x_{i+1}} = \mathbf{x_i} - \left(\nabla \mathbf{f}\left(\mathbf{x_i}\right)\right)^{-1} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x_i}\right)$$

  Nakon korekcije rešenja vraća se na korak 2.

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- **Primer**: Neka je dat sistem jednačina

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_2 - 10 \\ 4x_1 - x_2^2 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Za ovako definisanu vektorsku funkciju Jakobijeva matrica je

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2 \\ 4 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

- Pre početka iterativne procedure usvaja se da je zadovoljavajuća tačnost $\varepsilon = 0.001$.
- Neka je u koraku 1 početna pretpostavka rešenja

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

- Proverom tačnosti rešenja dobija se da je

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Dobijena tačnost nije zadovoljavajuća.
- Nastavljanjem iterativne procedure može se doći do rešenja sistema jednačina.

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.9545 \\ 3.6364 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)=\begin{bmatrix} 1.0930 \\ -0.4050 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 1.9545 \\ 3.6364 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3.9091 & 2 \\ 4 & -7.2727 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1.0930 \\ -0.4050 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.7586 \\ 3.4729 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)=\begin{bmatrix} 0.0384 \\ -0.0267 \end{bmatrix}$$

2. Kratak pregled metoda optimizacije
2.2. Njutnov metod

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.7586 \\ 3.4729 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.5172 & 2 \\ 4 & -6.9458 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.0384 \\ -0.0267 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7520 \\ 3.4653 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_3) = \begin{bmatrix} 0.4326 \cdot 10^{-4} \\ -0.5829 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

- Dakle, zadovoljavajuća tačnost je postignuta nakon 3. iteracije i kao konačno rešenje se dobija x_1 = 1.7520 i x_2 = 3.4653.